Devoir sur Table 5

Durée : 4h

- Tous les documents sur papier sont interdits.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées.
- Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
- La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
- Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
- Mettez en évidence vos résultats en les encadrant.
- Conformément au règlement de la Banque PT
  - Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
  - L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :
- Mise en évidence des résultats
- Soin et lisibilité de la copie. En particulier les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle
- Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur
- Respect de la grammaire et de l'orthographe

Problème

(*adapté de CCINP PC 2017*)

Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.

On considère un automate qui génère successivement les lettres P ou T jusqu'à obtenir une certaine séquence prédéfinie.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'automate génère la n-ième lettre à l'instant n de façon indépendante de toutes les générations précédentes.

On suppose également qu'à chaque génération, les lettres P et T ont des probabilités p et q (respectivement) d'être générées.

Suivant les parties considérées, on définit différents niveaux que l'automate peut atteindre.

On considère dans tous les cas que l'automate est initialement au niveau 0.

On se propose alors d'étudier essentiellement l'existence de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire correspondant au temps d'attente de la séquence prédéfinie à travers sa série génératrice.

Pour cette étude probabiliste, on mobilise diverses propriétés analytiques (surtout sur les séries entières) et quelques propriétés d'algèbre linéaire.

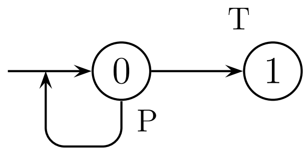
Dans les parties I, II et V, on examine le temps d'attente pour les séquences T puis TT, puis TPT et TTPPT. La partie II est indépendante de la partie I et traite de questions préliminaires sur les séries entières qui seront investies dans les parties III et V. La partie IV est indépendante des parties précédentes et traite les questions préliminaires d'algèbre linéaire qui servent exclusivement dans la partie V. La partie III ne dépend de la partie I que par la question 4. et de la partie II que par la question 10.. La partie V utilise seulement la question 11. de la partie II et la partie IV.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note
- P_n l'évènement « l'automate génère la lettre P à l'instant n »
- T_n l'évènement « l'automate génère la lettre T à l'instant n » .

Partie I — Étude d'un cas simple

Dans cette partie, on dit que l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 dès qu'il génère la lettre T. Si, en revanche, il génère la lettre P, alors il reste au niveau 0. L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 1. On résume l'expérience par la figure 1 suivante :

Figure 1



On note Y l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 1. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telle que $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. On note G_Y la série génératrice de Y et R_Y son rayon de convergence.

On sait alors que $R_Y \geqslant 1$ et que :

$$\forall t \in]-R_Y, R_Y[, \qquad G_Y(t) = \mathbb{E}(t^Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n)t^n.$$

1. Reconnaître la loi de Y et préciser en particulier $\mathbb{P}(Y = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que $R_Y = \dfrac{1}{p} > 1$ et que : $\forall t \in \left]-\dfrac{1}{p}, \dfrac{1}{p}\right[$, $G_Y(t) = \dfrac{qt}{1-pt}$.
3. Montrer que G_Y est 2 fois dérivable en 1 et que $G'(1) = \dfrac{1}{q}$ et $G''(1) = \dfrac{2p}{q^2}$.
4. Donner les valeurs de $\mathbb{E}(Y)$ et de $\mathbb{V}(Y)$.

Partie II — Séries entières

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(a) = -\dfrac{1}{a^{n+1}}$

5. Montrer que $\sum u_n(a)z^n$ est une série entière de rayon de convergence égal à $|a|$.
6. Montrer que si $|z| < |a|$, on a : $\dfrac{1}{z-a} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(a)z^n$.

Soit a, b et λ des nombres complexes non nuls. Dans les questions 7. à 10., on suppose que $|a| < |b|$.

On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k(a)u_{n-k}(b)$$

et, pour tout réel t tel que $|t| < |a|$,

$$f(t) = \frac{\lambda t^2}{(t-a)(t-b)}$$

7. Montrer que l'on a :

$$v_n = \frac{1}{ab^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{b}{a}\right)^k = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}}\right)$$

8. Trouver un équivalent simple de v_n quand n tend vers $+\infty$.
9. En déduire que le rayon de convergence de $\sum v_n z^n$ est égal à $|a|$ et que si $|z| < |a|$, alors

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n z^n.$$

10. Justifier que f est développable en série entière au voisinage de 0 et que la série entière qui lui est associée possède un rayon de convergence R_f tel que $R_f = |a|$.

Soit a, b, c et λ des nombres complexes non nuls. On suppose que : $|a| \leqslant |b| \leqslant |c|$.

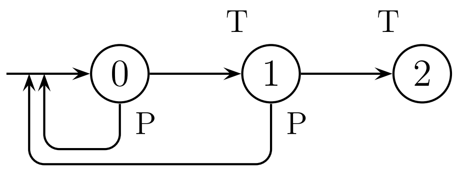
Pour tout réel t tel que $|t| < |a|$, on pose : $g(t) = \dfrac{\lambda t^3}{(t-a)(t-b)(t-c)}$.

11. Justifier que g est développable en série entière au voisinage de 0 et que la série entière qui lui est associée possède un rayon de convergence R_g tel que $R_g \geqslant |a|$.

Partie III — Étude d'un cas intermédiaire

Dans cette partie, on suppose que l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 en générant la lettre T. De même, l'automate passe du niveau 1 au niveau 2 en générant la lettre T. Si, en revanche, il génère la lettre P, alors qu'il est au niveau 0 ou 1, il retombe au niveau 0. L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 2, c'est-à-dire dès que l'automate aura généré la séquence TT. On résume l'expérience par la figure 2 suivante :

Figure 2



On note Z l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 2. Ainsi Z est le temps d'attente de la séquence TT.

On admet que Z est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ telle que $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p_n = \mathbb{P}(Z = n)$.

On note G_Z la série génératrice de Z et R_Z son rayon de convergence. On rappelle que $R_Z \geqslant 1$.

12. Calculer p_1, p_2 et p_3.
13. Justifier que $(P_1, T_1 \cap P_2, T_1 \cap T_2)$ est un système complet d'évènements.
14. En déduire que pour tout $n \geqslant 3$, on a : $p_n = pp_{n-1} + pqp_{n-2}$.
15. En déduire que pour tout $t \in [-1, 1]$, on a : $G_Z(t)(1 - pt - pqt^2) = q^2t^2$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $Q(t) = 1 - pt - pqt^2$, $\Delta = p^2 + 4pq > 0$, $a = \dfrac{\sqrt{\Delta} - p}{2pq}$ et $b = \dfrac{-\sqrt{\Delta} - p}{2pq}$.

16. Montrer que $Q(-1) = 1 + p^2 > 0$ et que $Q(1) = q^2 > 0$.
17. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Q(t) = -pq(t-a)(t-b)$.
18. Montrer que $1 < |a| < |b|$.

Pour tout réel t tel que $|t| < |a|$, on définit $f(t) = \dfrac{q^2t^2}{1 - pt - pqt^2}$.

19. Montrer à l'aide de la question 10. que f est développable en série entière au voisinage de 0, que sa série entière associée est G_Z et que $R_Z = |a|$.
20. Montrer que, pour tout $t \in]-|a|, |a|[$, on a : $G_Z(t) = \dfrac{q^2t^2}{1 - pt - pqt^2}$.
21. Montrer que Z admet une espérance et une variance puis que $\mathbb{E}(Z) = q^{-1} + q^{-2}$.
22. Vérifier, à l'aide des questions 4. et 21., que $\mathbb{E}(Z) \geqslant \mathbb{E}(Y) + 1$ où Y est la variable aléatoire définie en partie I.
23. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Partie IV — Algèbre linéaire

On considère les matrices $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} p & 0 & p & 0 \\ q & q & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. On note χ_A le polynôme caractéristique de A, i.e. $\chi_A(t) = \det(tI_4 - A)$.

24. Montrer que 0 est valeur propre de A et donner un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0.
25. Trouver les réels α, β et γ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\chi_A(t) = t^4 - t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma$.

On dit que la matrice colonne $S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$ est solution de (E_t) lorsque $S = tAS + L$.

26. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, S est solution de (E_t) si et seulement si $(I_4 - tA)S = L$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\psi_A(t)$ le déterminant de la matrice $I_4 - tA$.

27. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\psi_A(t) = t^4 \chi_A\left(\dfrac{1}{t}\right)$.
28. Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi_A(t) = -p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1$.
29. En déduire que, pour t au voisinage de 0, l'équation (E_t) possède une unique solution S.

Pour tout $k \in [\![1, 4]\!]$, on note U_k la k-ième colonne de $I_4 - tA$. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ et on suppose que la matrice colonne $S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$ est solution de (E_t).

30. Vérifier que $L = U_1S_0 + U_2S_1 + U_3S_2 + U_4S_3$.
31. En déduire que $\det_{\mathscr{B}}(U_1, U_2, U_3, L) = S_3 \cdot \det_{\mathscr{B}}(U_1, U_2, U_3, U_4) = S_3 \cdot \psi_A(t)$.
32. Montrer que, pour t au voisinage de 0, on a l'égalité :

$$S_3 = \frac{pq^2t^3}{-p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1}.$$

On se propose de déterminer certaines propriétés des valeurs propres de A. On note λ une valeur propre complexe non nulle de A.

33. Montrer que λ est valeur propre de la matrice transposée de A.
34. En déduire qu'il existe trois complexes non tous nuls x_1, x_2 et x_3 tels que :

$$(\mathscr{H}) \qquad \begin{cases} px_1 + qx_2 = \lambda x_1 \\ qx_2 + px_3 = \lambda x_2 \\ px_1 = \lambda x_3 \end{cases}.$$

On considère désormais trois complexes non tous nuls x_1, x_2 et x_3 qui vérifient le système $(\mathscr{H})$. On note alors $M = \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ et on remarque que l'on peut toujours se placer dans l'un des trois cas suivants :

(i) $M = |x_3|$

(ii) $M = |x_2|$ avec $M > |x_3|$;

(iii) $M = |x_1|$ avec $M > |x_2|$ et $M > |x_3|$.

35. Montrer, en distinguant ces trois cas, que $|\lambda| < 1$.
36. Montrer l'existence de nombres complexes λ_1, λ_2 et λ_3 tels que :

    $0 < \ |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant |\lambda_3| < 1 \quad$ et $\quad \forall t \in \mathbb{R},\ \chi_A(t) = t(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3).$
37. Montrer l'existence de nombres complexes μ, a, b et c tels que $\mu \neq 0$, $\quad 1 < |a| \leqslant |b| \leqslant |c|$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \psi_A(t) = \mu(t-a)(t-b)(t-c)$$

Partie V — Étude d'un dernier cas

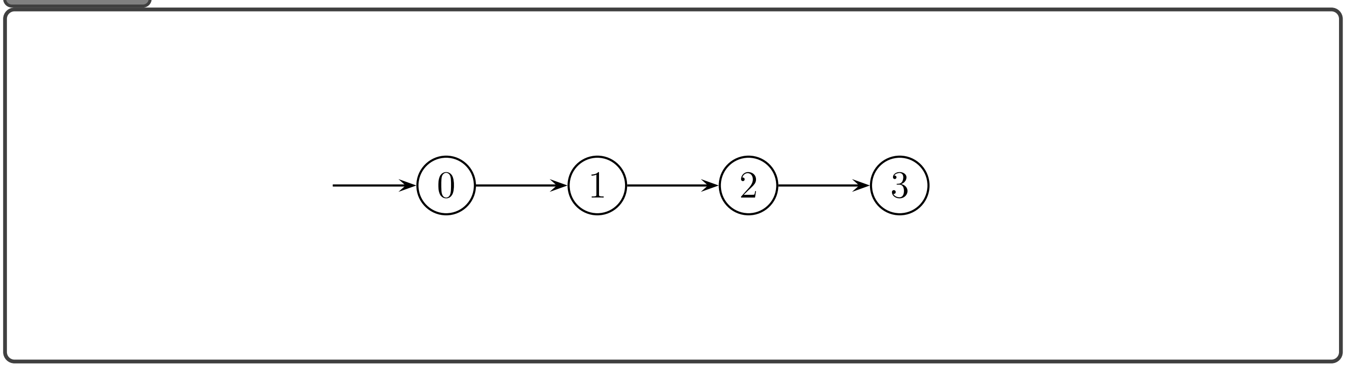
Dans cette partie, on suppose que :

- l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 en générant la lettre T ;
- l'automate passe du niveau 1 au niveau 2 en générant la lettre P ;
- l'automate passe du niveau 2 au niveau 3 en générant la lettre T ;
- si l'automate est au niveau 0 ou 2 et qu'il génère la lettre P, alors il retombe au niveau 0 ;
- si l'automate est au niveau 1 et qu'il génère la lettre T, alors il reste au niveau 1.

L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 3, c'est-à-dire dès que l'automate aura généré la séquence TPT.

38. Reproduire, sur votre copie, la figure 3 suivante en la complétant pour résumer l'expérience de cette partie V.

Figure 3



Pour $i \in [\![0, 3]\!]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note

— $E_{n,i}$ l'événement « après avoir généré la n-ième lettre, l'automate se trouve au niveau i »

— $E_{0,i}$ l'événement « l'automate se trouve initialement au niveau i »

On pose $p_{n,i} = \mathbb{P}(E_{n,i})$ et pour tout $t \in [-1, 1]$, on définit $S_i(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,i} t^n$.

On note X l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 3.

On admet que X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

On remarque que la série génératrice de X (notée G_X) est alors S_3 et on note R_X son rayon de convergence. On rappelle que $R_X \geqslant 1$.

39. Déterminer $p_{0,0}$, $p_{0,1}$, $p_{0,2}$ et $p_{0,3}$.

40. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\left\{\begin{array}{lllll} p_{n,0} & = & p \cdot p_{n-1,0} & + & p \cdot p_{n-1,2} \\ p_{n,1} & = & q \cdot p_{n-1,0} & + & q \cdot p_{n-1,1} \\ p_{n,2} & = & p \cdot p_{n-1,1} & & \\ p_{n,3} & = & q \cdot p_{n-1,2} & & \end{array}\right.$

Soit $t \in [-1, 1]$. On note $S(t)$ la matrice colonne suivante : $S(t) = \begin{pmatrix} S_0(t) \\ S_1(t) \\ S_2(t) \\ S_3(t) \end{pmatrix}$.

41. Montrer que $\left\{\begin{array}{lllllll} S_0(t) & = & tp \cdot S_0(t) & + & tp \cdot S_2(t) & + & 1 \\ S_1(t) & = & tq \cdot S_0(t) & + & tq \cdot S_1(t) & & \\ S_2(t) & = & tp \cdot S_1(t) & & & & \\ S_3(t) & = & tq \cdot S_2(t) & & & & \end{array}\right.$.
42. Montrer que la matrice colonne $S(t)$ est solution de l'équation (E_t) définie en partie IV.
43. Montrer que
$$\forall t \in]-R_X, R_X[,\ G_X(t) = \frac{pq^2t^3}{-p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1}$$
et montrer que $R_X > 1$.
44. Montrer que X admet une espérance et une variance.
45. Donner l'expression de $\mathbb{E}(X)$ en fonction de q seulement.
46. Proposer une méthode permettant de déterminer le temps d'attente moyen de la première réalisation par l'automate de la séquence TTPPT : on précisera notamment le schéma des six niveaux correspondants et la matrice analogue à A que l'on peut faire intervenir dans ce problème.